МАТЕМАТИКА

УДК 519.64
DOI 10.21685/2072-3040-2020-1-1

И. В. Бойков, Н. Ю. Кудряшова, А. А. Шалдаева

К ВОПРОСУ О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДЕННЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация.

Актуальность и цели. Работа посвящена исследованию множеств функций, в которых выполняется условие однозначной разрешимости вырожденных сингулярных интегральных уравнений. В настоящее время исследование многих разделов сингулярных интегральных уравнений можно считать в основном завершенным. Исключением являются сингулярные интегральные уравнения, обращающиеся в нуль на многообразиях с мерой, большей нуля. Построена теория сингулярных интегральных уравнений в вырожденных случаях, из которой следует, что, во-первых, вырожденные сингулярные интегральные уравнения имеют бесконечное число решений; во-вторых, для этих уравнений не справедливы первая и вторая теоремы Нетера. Но конкретные алгоритмы и приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений в вырожденных случаях отсутствуют. В связи с тем, что вырожденными сингулярными интегральными уравнениями моделируются многие процессы в физике и технике, возникает необходимость в разработке приближенных методов их решения. Кроме того, так как в пространстве Гельдера и в пространстве L_2 функций суммируемых в квадрате вырожденные сингулярные интегральные уравнения имеют бесконечное число решений, возникает актуальная задача выделения множеств единственности решений этих уравнений, а также не менее актуальная задача построения приближенных методов их решения.

Материалы и методы. Для выделения классов функций, в которых вырожденные сингулярные интегральные уравнения имеют единственное решение, используются методы теории функций комплексной переменной, краевые задачи Римана и теория сингулярных интегральных уравнений. При построении приближенных методов используются итерационно-проекционные методы.

Результаты. Построены классы функций, на которых решения, если они существуют, определяются однозначно. В связи с этим предложена новая постановка решения вырожденных сингулярных интегральных уравнений. Предложены и обоснованы методы коллокации и механических квадратур решения вырожденных сингулярных интегральных уравнений на построенных классах функций.

Выводы. Предложенные результаты могут быть непосредственно использованы при решении многих задач физики и техники, в частности, в задачах

© Бойков И. В., Кудряшова Н. Ю., Шалдаева А. А., 2020. Данная статья доступна по условиям всемирной лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/), которая дает разрешение на неограниченное использование, копирование на любые носители при условии указания авторства, источника и ссылки на лицензию Creative Commons, а также изменений, если таковые имеют место.

интегральной геометрии, аэродинамики, гидродинамики. Представляет интерес распространение этих результатов на вырожденные полисингулярные интегральные уравнения.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение, вырожденный случай, единственность решения, метод механических квадратур.

I. V. Boykov, N. Yu. Kudryashova, A. A. Shaldaeva

TO THE QUESTION OF UNIQUENESS OF DEGENERATE SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS SOLUTIONS

Abstract.

Background. The work is devoted to the study of sets of functions in which the condition for the unique solvability of degenerate singular integral equations is satisfied. At present, the study of many sections of singular integral equations can be considered completed. An exception is singular integral equations that vanish on manifolds with a measure greater than zero. The theory of singular integral equations in degenerate cases is constructed, from which it follows that, firstly, degenerate singular integral equations have an infinite number of solutions; secondly, the first and second Noether theorems are not valid for these equations. But specific algorithms and approximate methods for solving singular integral equations in degenerate cases are absent. Due to the fact that many processes in physics and technology are modeled by degenerate singular integral equations, it becomes necessary to develop approximate methods for solving them. In addition, since in the Holder space and in the space L2 of functions summable in a square, degenerate singular integral equations have an infinite number of solutions, the actual problem of distinguishing the uniqueness sets of the solutions of these equations arises, as well as the equally urgent problem of constructing approximate methods for solving them.

Materials and methods. To distinguish classes of functions in which degenerate singular integral equations have a unique solution, methods of the theory of functions of a complex variable, Riemann boundary value problems, and the theory of singular integral equations are used. When constructing approximate methods, iterative-projection methods are used.

Results. Classes of functions are constructed on which solutions, if they exist, are uniquely determined. In this regard, a new formulation of the solution of degenerate singular integral equations is proposed. Collocation and mechanical quadrature methods for solving degenerate singular integral equations on the constructed classes of functions are proposed and substantiated.

Conclusions. The proposed results can be directly used in solving many problems of physics and technology, in particular, in the problems of integral geometry, aerodynamics, and hydrodynamics. It is of interest to extend these results to degenerate polysingular integral equations.

Keywords: singular integral equation, degenerate case, uniqueness of solution, mechanical quadrature method.

Введение

При исследовании сингулярных интегральных уравнений (с.и.у.) вида

$$Kx \equiv a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{x(\tau)d\tau}{\tau - t} + \int_L h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t),\ t \in L, \tag{1}$$

выделяются два типа уравнений: уравнение нормального типа, когда $a^2(t)-b^2(t)\neq 0$ при $t\in L,$ и исключительный случай с.и.у., когда функция $a^2(t)-b^2(t)$ обращается в нуль в конечном числе точек $t_k\in L,$ $k=1,2,\ldots,N,$ $N=\text{const}$.

Здесь в качестве L можно взять замкнутые или разомкнутые контуры, ограниченные или неограниченные.

Теорию и приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений нормального типа в настоящее время можно считать полностью разработанными (см. [1–10]).

Значительно менее исследованными являются с.и.у. вида (1), у которых функция $a^2(t)-b^2(t)$ обращается в нуль в отдельных точках. Теория этих уравнений изложена в работах [1, 7, 8]. Проекционные методы решения этих уравнений исследовались в [8].

Существует отдельный класс с.и.у. вида (1), для которого не построены численные методы решения.

Это класс уравнений вида (1), у которых функция $a^2(t)-b^2(t),$ $t\in L$, обращается в нуль на многообразиях с мерой, большей нуля.

Классическим представителем этого класса является уравнение

$$Kx\equiv x(t)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{\tau-t}d\tau+\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(t,\tau)x(\tau)d\tau=f(t),\ \ t\in(-\infty,\infty). \qquad (2)$$

В работе [11] отмечено, что решение уравнения (2) не единственно в классе непрерывных суммируемых функций и единственно в классе непрерывных суммируемых функций, обращающихся в нуль на отрицательной полуоси.

М. М. Лаврентьев [11, 12] выделил следующие классы с.и.у., в которых условие нормальности нарушается во всей области определения уравнений:

$$x(t)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)d\tau}{\tau-t}=f(t), \qquad (3)$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau_1,t_2)d\tau_1}{\tau_1-t_1}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x(t_1,\tau_2)}{\tau_2-t_2}d\tau_2=f(t_1,t_2), \qquad (4)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\tau_1-t_1}-\frac{1}{\tau_2-t_2}\right)x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2=f(t_1,t_2), \qquad (5)$$

и поставил задачу нахождения условий существования единственных решений для уравнений этих классов.

Уравнениями вида (3)–(5) моделируются многие задачи физики и техники.

В частности, уравнение каветирующего крыла имеет вид

$$-x(t)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{x(\tau)}{\tau-t}d\tau=f(t).$$

Ряд задач интегральной геометрии приводит к уравнению (5).

В работе [13] выделены некоторые классы функций, на которых решение уравнений (3)–(5) единственно. В связи с тем, что неизвестны аналитические методы решения уравнений (1), (3)–(5), актуальной является разработка приближенных методов.

При этом необходимо отдельно построить приближенные методы решения уравнений вида (3)–(5) как на классах функций, на которых выполнены условия единственности решений, так и на классах функций, на которых возможны неединственные решения.

Отметим, что приближенные методы решения уравнения (3) исследованы в работах [14–16] на классах функций, на которых решение уравнения не единственное.

Данная работа посвящена исследованию условий однозначной разрешимости уравнений вида (3), а также уравнений вида

$$x(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{x(\tau)d\tau}{\tau - t} = f(t), \quad t\in L, \tag{6}$$

и

$$x(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{x(\tau)d\tau}{\tau - t} + \frac{1}{\pi i}\int_L h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad t\in L, \tag{7}$$

где L – гладкий замкнутый контур в плоскости комплексной переменной z.

Кроме того, рассмотрены приближенные методы решения интегральных уравнений вида (3), (6), (7) и

$$x(t)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{x(\tau)d\tau}{\tau - t} = f(t). \tag{8}$$

Статья построена следующим образом. В разд. 1 приведены определения и обозначения, используемые в работе. Раздел 2 посвящен вопросам единственности решений уравнений (3), (6), (7). В разд. 3 построены приближенные методы решения уравнений (3), (6)–(8). В разд. 4 приведены результаты вычислительных экспериментов.

1. Определения и обозначения

В этом разделе приведены необходимые сведения об используемых классах функций и описаны используемые обозначения.

Пусть $f(t)-$ функция, определенная на числовой оси, тогда

$$f_+(t)=\begin{cases} f(t), & t>0,\\ 0, & t<0,\end{cases} \quad f_-(t)=\begin{cases} 0, & t>0,\\ -f(t), & t<0,\end{cases}$$

и, следовательно, $f(t)=f_+(t)-f_-(t)$ при $t\neq 0$. Отметим, что значения $f(0)$ не влияют на дальнейшие рассуждения.

Определение 1 [17]. Функция $f(t)$ принадлежит классу $\{0\}$, если ее преобразование Фурье $F(x)=F(f(t))$ принадлежит $L_2(-\infty,\infty)$ и удовлетворяет условию Гельдера $|F(x_1)-F(x_2)|\le A|x_1-x_2|^{\lambda}$ для любых действительных значений x_1 и x_2, а для любых по модулю больших единиц x_1 и x_2 выполняется неравенство

$$|F(x_1)-F(x_2)|\le A\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|^{\lambda}.$$

Определение 2 [17]. Функция $f(x)$ принадлежит классу $\{\alpha\}$, если $f(x)e^{-\alpha x}\in\{0\}$.

Определение 3 [17]. Функция $f(x)=f_+(x)-f_-(x)$ принадлежит классу $\{\alpha,\beta\}$, если $f_+(x)\in\{\alpha\}, f_-(x)\in\{\beta\}$.

Определение 4. Через $J(a,b)$ обозначим класс функций $\varphi(t)$, определенных на множестве $(-\infty,\infty)$, удовлетворяющих условию Гельдера H_α, $0<\alpha\le 1$, и обращающихся в нуль на сегменте $[a,b]$.

Определение 5. Через $E(a,b)$ обозначим класс функций $f(x)$ определенных на множестве $(-\infty,\infty)$, удовлетворяющих условию Гельдера H_α, $0<\alpha\le 1$, и принимающих на интервале (a,b) заранее данные значения: $f(x)=f^*(x),\ x\in(a,b)$.

Напомним свойства преобразования Фурье, используемые в работе. Преобразование Фурье функции $f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$ определяется формулой

$$F(f)\equiv F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}dx,\quad -\infty<x<\infty.$$

Обратное преобразование Фурье позволяет восстанавливать функцию $f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$ по ее образу $F(\omega)$:

$$F^{-1}(F(f))\equiv f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega x}dx,\quad -\infty<x<\infty.$$

Известно, что $\|F(\omega)\|_{L_2(-\infty,\infty)}=\|f(x)\|_{L_2(-\infty,\infty)}$.

Ниже понадобятся следующие свойства преобразования Фурье: свойства свертки [17]:

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right)=F(f)F(g);$$

$$F(\operatorname{sgn}(x)f(x))=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(v)dv}{v-\omega};\quad F^{-1}\left(\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\tau)d\tau}{\tau-t}\right)=F(\omega)\operatorname{sgn}\omega.$$

Далее понадобится следующая формула:

$$F\left(\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)d\tau}{\tau-t}\right)=-F(\omega)\operatorname{sgn}\omega. \qquad (9)$$

Докажем ее справедливость. Нетрудно видеть, что

$$F\left(\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)d\tau}{\tau-t}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)d\tau}{\tau-t}\right)e^{i\omega t}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau\right)e^{it\omega}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t+u)}{u}du\right)e^{it\omega}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}f(t+u)e^{i(t+u)\omega}\frac{e^{-iu\omega}}{u}dudt=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t+u)e^{i(t+u)\omega}dt\right)\frac{e^{-iu\omega}}{u}du. \qquad (10)$$

Очевидно,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t+u)e^{i(t+u)\omega}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{it\omega}dt=F(\omega);$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iu\omega}}{u}du=\frac{-1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u\omega}{u}du=-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin u\omega}{u}du=-\operatorname{sgn}\omega. \qquad (11)$$

Здесь использована формула [18]:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin bx}{x}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}b. \qquad (12)$$

Объединяя формулы (10), (11) и (12), получаем выражение (9).

Пусть L – гладкий замкнутый контур на плоскости комплексной переменной z. Обозначим через $D^+(D^-)$ область, лежащую внутри (вне) контура L. Обозначим через $f^+(z)(f^-(z))$ функцию, аналитическую внутри (вне) контура L. Через $f^+(t)$ $(f^-(t))$, $t\in L$, обозначим предельные значения функций $f^+(z)$ $(f^-(z))$, когда точка z стремится к t, не выходя из соответствующей области.

2. Единственность и устойчивость решения уравнения (3)

Лемма 1 [13]. В классе функций $u(x)\in\{\alpha,\beta\}$ $(\alpha\le 0<\beta, \alpha<0\le\beta)$ уравнение (3) имеет единственное решение.

Доказательство. Применим к уравнению (3) преобразование Фурье. В результате приходим к алгебраическому уравнению

$$U(\omega)G(\omega) = F(\omega), \tag{13}$$

где $U(\omega)$, $F(\omega)$ – преобразование Фурье функций $u(x)$, $f(x)$,

$$G(\omega) = \begin{cases} 2, -\infty < \omega < 0, \\ 0, 0 < \omega < \infty. \end{cases}$$

Доказательство единственности решения уравнения (3) проводится методом от противного. Предположим, что в классе $\{\alpha,\beta\}$ уравнение (3) имеет решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Тогда функция $u^*(x) = u_1(x) - u_2(x)$ является решением однородного уравнения, отвечающего уравнению (3).

В монографии [17, с. 114], показано, что если $u \in \{\alpha,\beta\}$, $(\alpha < \beta)$, то функция

$$U(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{izx} dx, \quad z = x + iy,$$

является аналитической в полосе $\alpha \le y \le \beta$.

Тогда функция

$$U^*(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} u^*(x) e^{izx} dx$$

является аналитической в полосе $\alpha \le y \le \beta$.

Из формулы (13) следует, что

$$U^*(\omega)G(\omega) = 0, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Так как функция $G(\omega) \ne 0$ при $\omega \in (-\infty, 0)$, то $U^*(\omega) = 0$ при $\omega \in (-\infty, 0)$ и $U^*(\omega) \equiv 0$, $\omega \in (-\infty, \infty)$.

Следовательно, функция $U^*(z) = 0$ всюду в полосе $\alpha \le y \le \beta$.

Отсюда $u^*(t) \equiv 0, t \in (-\infty, \infty)$, т.е. $u_1(t) \equiv u_2(t), t \in (-\infty, \infty)$,

Из полученного противоречия следует справедливость леммы.

Эта лемма допускает следующие обобщения.

Лемма 2 [13]. В классе функций $J[a,b]$ уравнение (3) имеет единственное решение.

Доказательство проведем от противного.

Применим к уравнению (3) преобразование Фурье. В результате приходим к алгебраическому уравнению

$$U(\omega)G(\omega) = F(\omega),$$

где $U(\omega)$, $F(\omega)$ – преобразование Фурье функций $u(x)$, $f(x)$,

$$G(\omega)=\begin{cases}2,-\infty<\omega<0,\\ 0,0<\omega<\infty.\end{cases}$$

Предположим, что в классе $J[a,b]$ уравнение (3) имеет решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Тогда функция $u^*(x)=u_1(x)-u_2(x)$ является решением однородного уравнения, отвечающего уравнению (3), и

$$U^*(\omega)G(\omega)=0.$$

Известно [1], что функция

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u^*(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

является аналитической в плоскости C комплексной переменной z, за исключением множества $U(a,b)=(-\infty,a)\cup(b,\infty)$.

Так как $u^*(x)=0$ на сегменте $[a,b]$, то

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u^*(\xi)}{\xi-z}d\xi=0,z\in[a,b].$$

Следовательно, $\Phi(z)=0$ на всей плоскости комплексной переменной, за исключением множества точек $U(a,b)=(-\infty,a)\cup(b,\infty)$.

Из формул Сохоцкого – Племеля следует, что

$$u^*(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t),\quad t\in(-\infty,\infty).$$

Отсюда имеем $\Phi^+(t)=\Phi^-(t)=0$ при $t\in[a,b]$.

Так как $\Phi^\pm(t)$ – предельные значения функций $\Phi^\pm(z)$ аналитических в областях $D^\pm$, то по теореме об аналитическом продолжении $\Phi^+(t)=\Phi^-(t)=\Phi(z)=0$ при $z\in C\setminus U(a,b)$.

По формуле Сохоцкого – Племеля имеем

$$u^*(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=0,t\in(-\infty,\infty).$$

Лемма доказана.

Лемма 3. В классе функций $E(a,b)$ уравнение (3) имеет единственное решение.

Доказательство проведем от противного. Пусть уравнение (3) имеет два решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$, совпадающих на интервале (a,b). Тогда $u^*(x)=u_1(x)-u_2(x)$ – решение однородного уравнения, отвечающего уравнению (3) и $u^*(x)\equiv 0$ при $x\in(a,b)$. По аналогии с доказательством предыдущей леммы можно показать, что $u^*(x)\equiv 0$ при $x\in(-\infty,\infty)$. Лемма доказана.

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение с возмущением:

$$x(t)+\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{\tau-t}d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}h(t,\tau)x(\tau)d\tau=f(t). \tag{14}$$

Теорема 1 [13]. Пусть функция $h(t,\tau)$ при любом фиксированном $\tau(-\infty<\tau<\infty)$ принадлежит классу $\{\alpha,\beta\},(\alpha\le 0<\beta$ или $\alpha<0\le\beta),$ а решение уравнения (14) ищется в классе функций $\{\alpha_1,\beta_1\}$ $(\alpha_1\le 0<\beta_1$ или $\alpha_1<0\le\beta_1),$ причем отрезки $[\alpha,\beta]$ и $[\alpha_1,\beta_1]$ имеют общую часть, т.е. $\max(\alpha,\alpha_1)<\min(\beta,\beta_1).$ Тогда решение уравнения (14) единственно.

Доказательство. Применим к обеим частям уравнения (14) преобразование Фурье. В результате приходим к уравнению Фредгольма в спектральной области

$$X(\omega)G(\omega)+\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega,\tau)x(\tau)d\tau=F(\omega), \tag{15}$$

где

$$G(\omega)=\begin{cases}2, & -\infty<\omega<0,\\ 0, & 0<\omega<\infty.\end{cases}$$

По условиям теоремы функция $h(t,\tau)$ при любом фиксированном $\tau(-\infty<\tau<\infty)$ принадлежит классу $\{\alpha,\beta\}$. Тогда в предположении, что $x(t)\in L_2(-\infty,\infty),$ функция

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t,\tau)x(\tau)d\tau\in\{\alpha,\beta\}.$$

В самом деле

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_+(t)e^{-\alpha t}e^{i\omega t}dt\right|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}h_+^t(t,\tau)e^{-\alpha t}x(\tau)d\tau\right)e^{i\omega t}dt\right|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}h_+^t(t,\tau)e^{-\alpha t}e^{i\omega t}dt\,x(\tau)d\tau\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}h_+^t(t,\tau)e^{-\alpha t}e^{i\omega t}dt\right|^2d\tau\right]^{1/2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|x(\tau)|^2\,d\tau\right]^{1/2}\le C\int_{-\infty}^{\infty}\left|H_+^{t,-\alpha}(t,\tau)\right|^2dt.$$

Здесь

$$h_+^t(t,\tau)=\begin{cases}h(t,\tau), & 0<t<\infty,\\ 0, & -\infty<t<0.\end{cases}$$

$$H_{+}^{t,-\alpha}(\omega,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h_{+}^{t}(t,\tau)e^{-\alpha t}e^{i\omega t}dt.$$

Таким образом, $\varphi_{+}(t)\in\{\alpha\}$. Аналогично доказывается, что $\varphi_{-}(t)\in\beta$.

После этих предварительных рассуждений перейдем к доказательству единственности решения уравнений (14).

Доказательство проведем от противного. Предположим, что уравнение (14) имеет решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Тогда функция $x^{*}(t)=x_1(t)-x_2(t)$ является решением однородного уравнения, соответствующего уравнению (14).

Очевидно,

$$\Psi(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} H(\omega,\tau)x^{*}(\tau)d\tau=0,\ \omega\in(0,\infty).$$

Из результатов монографии [17, с. 114] следует, что функция

$$\Psi(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} H(z,\tau)x^{*}(\tau)d\tau$$

является аналитической в полосе $\alpha<y<\beta$ плоскости комплексной переменной.

Следовательно, $\Psi(z)=0$ в полосе $\alpha<y<\beta$ плоскости комплексной переменной. Отсюда и из уравнения (15) при $x(t)=x^{*}(t)$ следует, что $X^{*}(\omega)G(\omega)=0$ при $\omega\in(-\infty,\infty)$. Так как $G(\omega)=2$ при $\omega\in(-\infty,0)$, то $X^{*}(\omega)=0$ при $\omega\in(-\infty,0)$. Так как по предположению решение уравнения (14) принадлежит классу $\{\alpha_1,\beta_1\}$, то функция $X^{*}(z)$ аналитическая в полосе $\{\alpha_1\le y\le\beta_1\}, z=x+iy$. Следовательно, $X^{*}(\omega)=0$ при $\omega\in(-\infty,\infty)$. Применяя к $X^{*}(\omega)$ обратное преобразование Фурье, имеем $x^{*}(t)=0$ при $t\in(-\infty,\infty)$. Таким образом, уравнение (14) имеет единственное решение.

Теорема доказана.

Рассмотрим возмущение сингулярного интегрального уравнения сверткой:

$$x(t)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau=f(t). \tag{16}$$

Теорема 2 [13]. Пусть функция $h(t)$ принадлежит классу $\{\alpha,\beta\},(\alpha\le 0<\beta$ или $\alpha<0\le\beta$, а решение уравнения (16) ищется в классе функций $\{\alpha_1,\beta_1\}$ $(\alpha_1\le 0<\beta_1,\alpha_1<0\le\beta_1)$, причем отрезки $[\alpha,\beta]$ и $[\alpha_1,\beta_1]$ имеют общую часть, т.е. $\max(\alpha,\alpha_1)<\min(\beta,\beta_1)$. Тогда решение уравнения (16) единственно.

Теорема 3 [13]. Пусть решение уравнения (14) принадлежит классу функций $E(a,b)$. Пусть функция $h(t,\tau)$ при любом фиксированном $\tau(-\infty < \tau < \infty)$ принадлежит классу $\{\alpha,\beta\}$, $(\alpha \le 0 < \beta$ или $\alpha < 0 \le \beta)$. Тогда решение уравнения (14) в классе функций $E(a,b)$ единственно.

Доказательства теорем 2, 3 аналогичны доказательству теоремы 1 и поэтому опускаются.

Отметим, что аналогичные утверждения справедливы и для уравнений вида

$$u(x) + \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{u(\xi)}{\xi - x}d\xi + \int_\gamma h(x,\xi)u(\xi)d\xi = f(x),$$

где γ – гладкий замкнутый контур на плоскости комплексной переменной z.

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение

$$x(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{x(\tau)d\tau}{\tau - t} = f(t), \tag{17}$$

где L – гладкий замкнутый контур на плоскости комплексной переменной z.

Уравнения вида (17) имеют бесконечное число решений. В самом деле, рассмотрим однородное уравнение

$$x(t) + \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{x(\tau)d\tau}{\tau - t} = 0, \tag{18}$$

где γ – единичная окружность с центром в начале координат.

Известна [1] формула

$$\frac{1}{\pi i}\int_\gamma \tau^k \frac{d\tau}{\tau - t} = \begin{cases} t^k, k = 0,1,\ldots, \\ -t^k, k = \ldots,-n,\ldots,-1. \end{cases}$$

Следовательно, функции $t^k, k = -1,\ldots,-n,\ldots$ являются решениями уравнения (18).

Так как к уравнениям вида (17) приводит ряд задач теории автоматического регулирования и амплитудно-фазовая проблема [15, 16], то представляет интерес выделение классов единственности решения этих уравнений.

Обозначим через $E(l)$ класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера $H_\alpha(0 < \alpha \le 1)$ на контуре L и принимающих заранее заданные значения на кривой l, $l \subset L$.

Лемма 4. Уравнение (17) имеет единственное решение в классе функций $E(l)$.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что уравнение имеет решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Тогда $x^*(t) = x_1(t) - x_2(t)$ является решением однородного уравнения, отвечающего уравнению (17). Кроме того, $x^*(t) = 0$ при $t \in l$.

Рассмотрим интеграл

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{x^*(\tau)d\tau}{\tau-z},\quad L_1=L\setminus l.$$

Функция $\Phi(z)$ является аналитической на плоскости комплексной переменной всюду, за исключением множества L_1.

Так как $\Phi(t)=0$ при $t\in l$, то $\Phi(z)\equiv 0$ всюду на плоскости комплексной переменной за исключением множества точек L_1.

Отсюда следует, что функция

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{x^*(\tau)}{\tau-z}d\tau$$

является аналитической в плоскости комплексной переменной всюду за исключением контура L_1, причем $\Psi^+(z)=0,\ z\in D^+;\ \Psi^-(z)=0,\ z\in D^-$.

Следовательно, $\Psi^+(t)\equiv 0$ и $\Psi^-(t)\equiv 0$ и по теореме Сохоцкого – Племеля $x^*(t)\equiv 0$. Из полученного противоречия следует справедливость леммы.

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение

$$x(t)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L}\frac{x(\tau)d\tau}{\tau-t}+\int\limits_{L}h(t,\tau)x(\tau)d\tau=f(t), \tag{19}$$

где L – гладкий замкнутый контур на плоскости комплексной переменной z.

Теорема 4. Пусть решение уравнение (19) принадлежит классу функций $E(l)$, где $l\in L$. Пусть при любых $\tau\in L$ функция $h(t,\tau)$ аналитическая по переменной t в области G, такой что $l\in G$ и $l\cap\partial G=\varnothing$. Тогда решение уравнения (19) в классе функций $E(l)$ единственно.

Доказательство проведем от противного. Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – решения уравнения (19). Тогда $x^*(t)=x_1(t)-x_2(t)$ – решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (19).

Рассмотрим функцию

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{x^*(\tau)}{\tau-z}d\tau,\quad L_1=L\setminus l.$$

Очевидно, функция $\Phi(z)$ является аналитической на плоскости комплексной переменной z всюду, за исключением точек контура L_1.

При $t\in l$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L}\frac{x^*(\tau)d\tau}{\tau-t}=-\int\limits_{L}h(t,\tau)x^*(\tau)d\tau,$$

что эквивалентно равенству

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{x^*(\tau)d\tau}{\tau-t}=-\int\limits_{L_1}h(t,\tau)x^*(\tau)d\tau.$$

Рассмотрим функции

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{x^*(\tau)d\tau}{\tau-z}\ \text{ и }\ \pounds(z)=-\int\limits_{L_1}h(z,\tau)x^*(\tau)d\tau.$$

Функции $\Psi(z)$ и $\pounds(z)$ являются аналитическими в области G и равны между собой на дуге l.

Так как функция $\Psi(z)$ является аналитической в плоскости z всюду, за исключением кривой L_1, то такой же является и функция $\pounds(z)$. Кроме того, функция $\pounds(z)$ является аналитической в G. Следовательно, функции $\pounds(z)$ и $\Psi(z)$ являются аналитическими во всей плоскости комплексной переменной. Так как $\lim\limits_{z\to\infty}\Psi(z)=0$, то и $\Psi(\infty)=0$. Из теоремы Лиувилля следует, что $\Psi(z)\equiv 0$.

Следовательно, функции $\Psi(z)$ и $\pounds(z)$ тождественно равны нулю во всей плоскости комплексной переменной.

Применяя теперь к интегралу $\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L}\frac{x^*(\tau)}{\tau-t}d\tau$ формулу Сохоцкого – Племеля, имеем $x^*(t)\equiv 0,\ \ t\in L.$ Из полученного противоречия следует справедливость теоремы.

Введенный выше класс функций $E(a,b)$ позволяют следующим образом поставить задачу приближенного решения сингулярных интегральных уравнений в вырожденном случае: найти решение уравнения

$$a(t)x(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)d\tau}{\tau-t}=f(t),$$

где $a^2(t)-b^2(t)\equiv 0,\ \ t\in[\alpha,\beta]$ и $x(t)=u^*(t)$, где $u^*(t)$ – заданная функция при $t\in[\alpha_1,\beta_1]\subset[\alpha,\beta]$.

Аналогичным образом формулируется задача и для остальных видов сингулярных интегральных уравнений.

4. Приближенные методы решения вырожденных уравнений

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение

$$x(t)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{x(\tau)}{\tau-t}d\tau=f(t) \tag{20}$$

в предположении, что решение ищется в классе функций $J(a,b)$, где $-1 < a < b < 1$.

Возьмем систему узлов t_k, $k = 1,2,\dots,n$, где в качестве узлов t_k могут браться как узлы ортогональных многочленов, так и равноотстоящие узлы. Единственное ограничение, которое налагается на систему узлов: точки a и b должны быть в числе узлов t_k, $k = 1,2,\dots,n$.

Приближенное решение уравнения (20) будем искать в виде полинома

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k(t),$$

где $\psi_k(t)$ – фундаментальные полиномы по узлам t_k, $k = 1,2,\dots,n$.

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ полинома $x_n(t)$ определяются из системы уравнений

$$x(t_k) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{x(\tau)}{\tau - t_k} d\tau = f(t_k), \quad k = 1,2,\dots,n, \tag{21}$$

полученной методом коллокации.

Для решения системы (21) может быть использован как метод Гаусса, так и непрерывный метод решения операторных уравнений [19].

Аналогичным образом строятся вычислительные схемы и для уравнений (7), (8).

5. Вычислительный эксперимент

Рассмотрим уравнение

$$x(t) - \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma} \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau = \frac{2}{t}. \tag{22}$$

Уравнение (22) имеет бесконечное число решений вида

$$x(t) = \frac{1}{t} + \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k t^k, \tag{23}$$

где ξ_k – произвольные комплексные числа.

Приближенное решение уравнения (22) будем искать в предположении, что известно решение в первом квадранте:

$$x^*(t) = e^{-is}, \; s \in [0, \pi/2]. \tag{24}$$

Для удобства вычислений от уравнения (22) перейдем к уравнению с ядром Гильберта:

$$x(e^{is}) - \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{2\pi} x(e^{i\sigma}) \operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2} d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} x(e^{i\sigma}) d\sigma = 2e^{-is}. \tag{25}$$

Для простоты обозначений запишем уравнение (25) в виде

$$z(s)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} z(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} z(\sigma)d\sigma=g(z), \tag{26}$$

где $z(s)=a(s)+ib(s)$, $g(s)=g_1(s)+ig_2(s)$.

Приближенное решение уравнения (26) ищется в виде

$$z_n(s)=\sum_{k=0}^{2n} z_k\psi_k(s),$$

где

$$\psi_k(s)=\frac{1}{2n+1}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(s-s_k)}{\sin\frac{s-s_k}{2}},\ k=\overline{0,2n}.$$

В дальнейшем полагаем, что n – четное число.

Неизвестные $z_k(s)$, $k=\overline{0,2n},$ определяются методом механических квадратур по узлам $s_k=2\pi k/(2n+1)$.

В результате переходим к системе уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{(2n+1)i}\displaystyle\sum_{l=n/2+1}^{2n} z_l\gamma_{k-l}-\dfrac{1}{2n+1}\sum_{l=n/2+1}^{2n} z_l= \\ =g_k-z_k+\dfrac{1}{(2n+1)i}\displaystyle\sum_{l=0}^{n/2} z_l\gamma_{k-l}+\dfrac{1}{2n+1}\sum_{l=0}^{n/2} z_l, \quad k=\overline{0,\dfrac{n}{2}}, \\ z_k-\dfrac{1}{(2n+1)i}\displaystyle\sum_{l=n/2+1}^{2n} z_l\gamma_{k-l}-\dfrac{1}{2n+1}\sum_{l=n/2+1}^{2n} z_l= \\ =g_k+\dfrac{1}{(2n+1)i}\displaystyle\sum_{l=0}^{n/2} z_l\gamma_{k-l}+\dfrac{1}{2n+1}\sum_{l=0}^{n/2} z_l, \quad k=\overline{\dfrac{n}{2}+1,2n}, \end{cases} \tag{27}$$

где $\gamma_{k-l}=\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{s_k-s_l}{4},\ (k-l)-\text{четная}, \\ \operatorname{ctg}\dfrac{s_l-s_k}{2},\ (k-l)-\text{нечетная}. \end{cases}$

Так как в системе (27) $\left[\frac{n}{2}\right]$ значения z_k полагаются известными, то подстановка этих значений в (27) приведет к системе уравнений размера $(2n+1)\times\left(2n+1-\frac{n}{2}\right)$. Обозначим полученную систему через

$$K_n z_n=g_n. \tag{28}$$

Умножая (28) на сопряженную матрицу K_n^*, приходим к следующей системе уравнений:

$$K_n^* K_n z_n = K_n^* g_n,$$

которая решается методом Гаусса.

Результаты решения модельной задачи при $n = 6$ представлены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты решения

Точное решение	Приближенное решение	Погрешность
–0,354604 – 0,935016i	–0,417647 – 1,345480i	0,063042 + 0,410463i
–0,748510 – 0,663122i	–0,984190 – 0,971503i	0,235679 + 0,308380i
–0,970941 – 0,239315i	–1,211852 – 0,371830i	0,240910 + 0,132514i
–0,970941 + 0,239315i	–1,266157 + 0,276339i	0,295215 + 0,037023i
–0,748510 + 0,663122i	–0,911311 + 0,869399i	0,162800 + 0,206276i
–0,354604 + 0,935016i	–0,464716 + 1,227863i	0,110111 + 0,317156i
0,120536 + 0,992708i	0,242857 + 1,309865i	0,122321 + 0,317156i
0,568064 + 0,822983i	0,710104 + 1,008200i	0,142040 + 0,185216i
0,885456 + 0,464723i	1,502291 + 0,322868i	0,616835 + 0,141854i

В виде эксперимента уравнение (22) решалось в предположении, что известно решение только в одной точке z_0. Результаты эксперимента при $n = 6$ приведены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты решения

Точное решение	Приближенное решение	Погрешность
0,885456 – 0,464723i	1,417661 – 0,456641i	0,532205 + 0,008081i
0,568064 – 0,822983i	1,043317 – 0,905545i	0,475253 + 0,082562i
0,120536 – 0,992708i	0,396709 – 1,213417i	0,276172 + 0,220708i
–0,354604 – 0,935016i	–0,198599 – 1,097082i	0,156005 + 0,162066i
–0,748510 – 0,663122i	–0,774030 – 0,772113i	0,025520 + 0,108991i
–0,970941 – 0,239315i	–1,049605 – 0,169122i	0,078663 + 0,070193i
–0,970941 + 0,239315i	–1,112182 + 0,436735i	0,141240 + 0,197419i
–0,748510 + 0,663122i	–0,804786 + 1,035652i	0,056275 + 0,372529i
–0,354604 + 0,935016i	–0,370292 + 1,349083i	0,015687 + 0,414066i
0,120536 + 0,992708i	0,272007 + 1,445280i	0,151471 + 0,452571i
0,568064 + 0,822983i	0,703211 + 1,082840i	0,135146 + 0,259856i
0,885456 + 0,464723i	1,295790 + 0,476731i	0,410334 + 0,012007i

Решение модельных примеров продемонстрировало высокую эффективность предложенных вычислительных схем.

Библиографический список

1. **Гахов, Ф. Д.** Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – Москва : Наука, 1963. – 640 с.
2. **Мусхелишвили, Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – Москва : Наука, 1966. – 707 с.

3. **Иванов, В. В.** Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений / В. В. Иванов. – Киев : Наукова Думка, 1968. – 288 с.
4. **Гохберг, И. Ц.** Уравнения в свертках и проекционные методы их решения / И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман. – Москва : Наука, 1971. – 352 с.
5. **Белоцерковский, С. М.** Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях / С. М. Белоцерковский, И. К. Лифанов. – Москва : Наука, 1985. – 256 с.
6. **Лифанов, И. К.** Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент / И. К. Лифанов. – Москва : ТОО «Янус», 1995. – 520 с.
7. **Mikhlin, S. G.** Singulare Integraloperatoren / S. G. Mikhlin, S. Prossdorf. – Berlin, Acad. Verl., 1980. – 514 p.
8. **Prossdorf, S.** Numerical Analysis for Integral and Related Operator Equations / S. Prossdorf, B. Silbermann. – Berlin : Acad. Verl., 1991. – 544 p.
9. **Бойков И. В.** Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2004. – 316 с.
10. **Чикин, Л. А.** Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений / Л. А. Чикин // Ученые записки Казанского государственного университета. – 1953. – Т. 113, кн. 10. – С. 57 – 105.
11. **Лаврентьев, М. М.** Об одном классе сингулярных интегральных уравнений / М. М. Лаврентьев // Успехи математических наук. – 1979. – Т. 34, № 4. – С.143.
12. **Лаврентьев, М. М.** Об одном классе сингулярных интегральных уравнений / М. М. Лаврентьев // Сибирский математический журнал. – 1980. – Т. 21, № 3. – С. 225–228.
13. **Бойков, И. В.** Об одном исключительном случае сингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков // Применение вычислительных методов в научно-технических исследованиях : межвуз. сб. науч. тр. – Вып. 6. – Пенза : Изд-во Пенз. политех. ин-та, 1984. – С. 3–11.
14. **Бойков, И. В.** Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений в исключительных случаях / И. В. Бойков, Н. Ю. Кудряшова // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36, № 9. – С. 1230–1237.
15. **Бойков, И. В.** Приближенное решение амплитудной и фазовой проблем для одномерных дискретных отображений / И. В. Бойков, Я. В. Зелина // Вопросы радиоэлектроники. – 2017. – № 12. – С. 89–92.
16. **Бойков, И. В.** К решению амплитудно-фазовой проблемы / И. В. Бойков, Я. В. Зелина // Вопросы радиоэлектроники. – 2018. – № 12. – С. 64–68.
17. **Гахов, Ф. Д.** Уравнения типа свертки / Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский. – Москва : Наука, 1978. – 296 с.

References

1. Gakhov F. D. *Kraevye zadachi* [Boundary value problems]. Moscow: Nauka, 1963, 640 p. [In Russian]
2. Muskhelishvili N. I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular integral equations]. Moscow: Nauka, 1966, 707 p. [In Russian]
3. Ivanov V. V. *Teoriya priblizhennykh metodov i ee primenenie k chislennomu resheniyu singulyarnykh integral'nykh uravneniy* [The theory of approximate methods and its application to the numerical solution of singular integral equations]. Kiev: Naukova Dumka, 1968, 288 p. [In Russian]
4. Gokhberg I. Ts., Fel'dman I. A. *Uravneniya v svertkakh i proektsionnye metody ikh resheniya* [Convolution equations and projection methods for solving them]. Moscow: Nauka, 1971, 352 p. [In Russian]

5. Belotserkovskiy S. M., Lifanov I. K. *Chislennye metody v singulyarnykh integral'nykh uravneniyah* [Numerical methods in singular integral equations]. Moscow: Nauka, 1985, 256 p. [In Russian]
6. Lifanov I. K. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniy i chislennyy eksperiment* [The method of singular integral equations and numerical experiment]. Moscow: TOO «Yanus», 1995, 520 p. [In Russian]
7. Mikhlin S. G., Prossdorf S. *Singulare Integraloperatoren*. Berlin, Acad. Verl., 1980, 514 p.
8. Prossdorf S., Silbermann B. *Numerical Analysis for Integral and Related Operator Equations*. Berlin: Acad. Verl., 1991, 544 p.
9. Boykov I. V. *Priblizhennoe reshenie singulyarnykh integral'nykh uravneniy* [An approximate solution of singular integral equations]. Penza: Izd-vo PGU, 2004, 316 p. [In Russian]
10. Chikin L. A. *Uchenye zapiski Kazanskogo gosudarstvennogo universiteta* [Proceedings of Kazan State University]. 1953, vol. 113, bk. 10, pp. 57 – 105. [In Russian]
11. Lavrent'ev M. M. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Advances in mathematical sciences]. 1979, vol. 34, no. 4, p. 143. [In Russian]
12. Lavrent'ev M. M. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* [Siberian mathematical journal]. 1980, vol. 21, no. 3, pp. 225–228. [In Russian]
13. Boykov I. V. *Primenenie vychislitel'nykh metodov v nauchno-tekhnicheskikh issledovaniyakh: mezhvuz. sb. nauchn. tr.* [The use of computational methods in scientific and technical research: interuniversity collected papers]. Issue 6. Penza: Izd-vo Penz. politekh. in-ta, 1984, pp. 3–11. [In Russian]
14. Boykov I. V., Kudryashova N. Yu. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 2000, vol. 36, no. 9, pp. 1230–1237. [In Russian]
15. Boykov I. V., Zelina Ya. V. *Voprosy radioelektroniki* [Radioelectronics' issues]. 2017, no. 12, pp. 89–92. [In Russian]
16. Boykov I. V., Zelina Ya. V. *Voprosy radioelektroniki* [Radioelectronics' issues]. 2018, no. 12, pp. 64–68. [In Russian]
17. Gakhov F. D., Cherskiy Yu. I. *Uravneniya tipa svertki* [Convolution type equations]. Moscow: Nauka, 1978, 296 p. [In Russian]

Бойков Илья Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: boikov@pnzgu.ru

Boykov Il'ya Vladimirovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University (40, Krasnaya street, Penza, Russia)

Кудряшова Наталья Юрьевна
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: math.kudryashova@yandex.ru

Kudryashova Natal'ya Yur'evna
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University (40, Krasnaya street, Penza, Russia)

Шалдаева Анастасия Александровна
магистрант, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Shaldaeva Anastasiya Aleksandrovna
Masters's degree student, Penza State University (40, Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: nastyashaldaeva@mail.ru

Образец цитирования:

Бойков, И. В. К вопросу о единственности решений вырожденных сингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, Н. Ю. Кудряшова, А. А. Шалдаева // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 1 (53). – С. 3–21. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-1-1.